

Seminar: Ausgewählte höhere Kurven

Janine Scholtes

6. März 2017

Die Pascalsche Schnecke und die Kartesische Ovale

1 Pascalsche Schnecke

1.1 Etienne Pascal

Etienne Pascal war ein französischer Mathematiker und lebte 1588 bis 1651. Um 1637 entdeckte Pascal unter anderem die nach ihm benannte Pascalsche Schnecke, welche man unter anderem zur Dreiteilung des Winkels verwenden konnte.

Definition. Die Pascalsche Schnecke ist der Ort der Punkte auf allen von einem bestimmten Umfangspunkt O eines Kreises ausgehenden Sehnen, die von dem zweiten Durchschnittspunkt Q der Sehnen mit dem Kreis gleich weit entfernt sind.

1.2 Erzeugung der Kurve als Konchoide und deren Eigenschaften

Wie aus dem vorherigen Vortrag bekannt, wird die Konchoide durch eine beliebige Kurve erzeugt. Hier betrachten wir den Spezialfall der Kreiskonchoide.

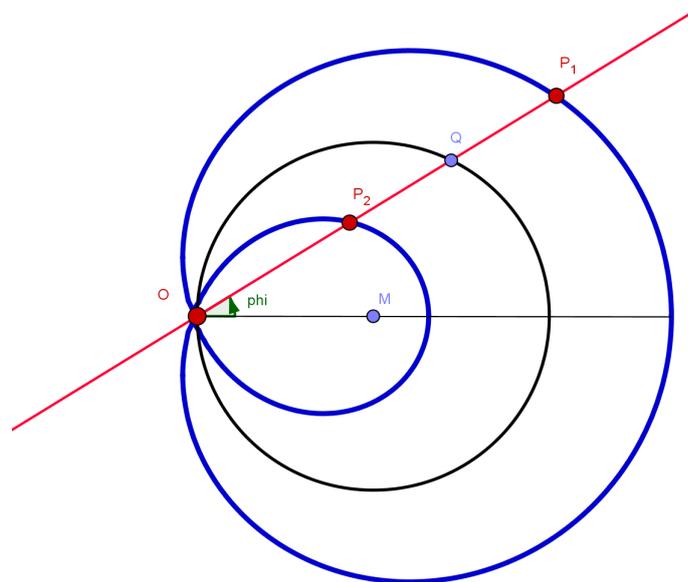


Abbildung 1: Kreiskonchoide

Wir betrachten einen Kreis M mit Durchmesser b , einen Punkt Q auf M und einen Abstand a zu Q . Wählt man nun einen Winkel φ mit Scheitelpunkt O , so ergibt sich eine Sekante durch den zweiten Umfangspunkt Q . Von diesem wird zu beiden Seiten der Sekante der Abstand a abgetragen. Dadurch erhält man die Punkte P_1 und P_2 . Konstruiert man diese Punkte für jeden Winkel φ , entsteht die Pascalsche Schnecke. Wenn wir einen Punkt P_1 auf der äußeren Kurve betrachten, so erkennen wir man leicht, dass gilt:

$$OP_1 = OQ + QP_1$$

Wir erhalten durch Anwendung der bekannten Größen $r = a + b\cos(\varphi)$. Lässt man für a auch negative Werte zu, werden auch die Punkte auf der inneren Kurve erreicht und man erhält damit die Radiusformel der gesamten Kurve mit:

$$r(\varphi) = a + b\cos(\varphi)$$

Durch Einführen der kartesischen Koordinaten $x = r(\varphi)\cos(\varphi)$, $y = r(\varphi)\sin(\varphi)$ ergibt sich die algebraische Gleichung

$$a^2(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2 - bx)^2 = 0$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich sofort erkennen, dass es sich bei dieser Kurve um eine bizirkuläre Quartik handelt. Das bedeutet, sie hat Grad 4 und führt zweimal zurück auf den Ausgangspunkt.

Die Pascalsche Schnecke lässt sich auch durch eine Abrollkurve beschreiben. Dabei wählt man einen Kreis mit Radius r_1 und rollt darauf einen Kreis mit Radius r_2 ab. In den abzurollenden Kreis fixiert man einen Punkt P . Die Kurve, die P beim Abrollen beschreibt, ist die Pascalsche Schnecke.

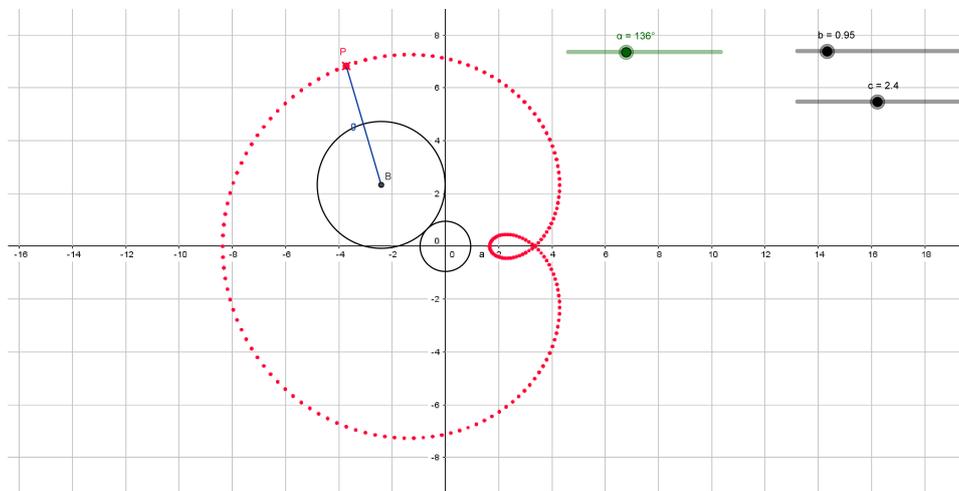
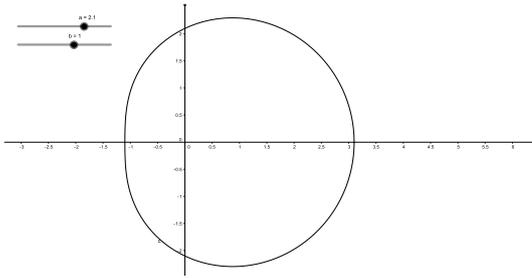
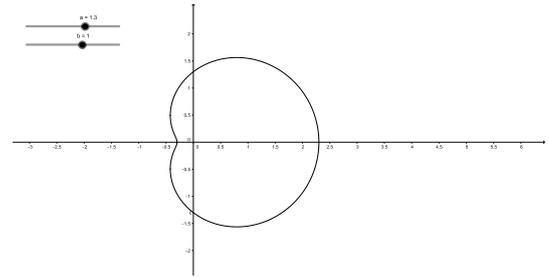


Abbildung 2: Pascalsche Schnecke als Abrollkurve

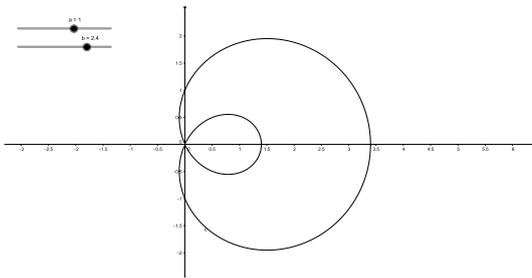
Für verschiedene Werte von a und b ergeben sich folgende Formen der Pascalschen Schnecke.



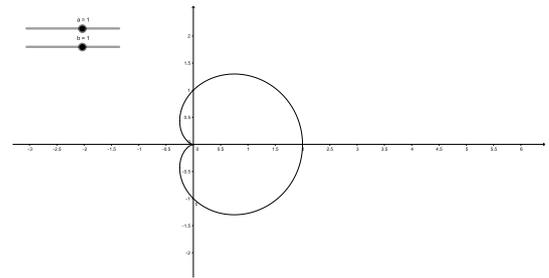
(a) Pascalsche Schnecke für $a = 2.1$ und $b = 1$



(b) Pascalsche Schnecke für $a = 1.3$ und $b = 1$



(c) Pascalsche Schnecke für $a = 1$ und $b = 2.4$



(d) Pascalsche Schnecke für $a = 1$ und $b = 1$

Definition (Multiplizität). Die Multiplizität einer Kurve gibt die Vielfachheit ihrer Nullstellen an. Dabei nennen wir einen Punkt P der Kurve regulär, falls die Multiplizität $\text{Mult}_P = 1$ ist. Wir nennen P singulär, falls $\text{Mult}_P \geq 2$.

Wir kennen eine leichte Methode, um mehrfache Nullstellen aufzufinden. Bekannt ist, dass von einer differenzierbaren Funktion mit k -facher Nullstelle an P die Ableitung f' eine $(k - 1)$ -fache Nullstelle besitzt.

Betrachten wir nun $f(x, y) = a^2(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2 - bx)^2$, so fällt auf, dass nur der Punkt $(0, 0)$ der Kurve infrage kommt, singulär zu sein. Dazu bilden wir die beiden partiellen Ableitungen $\partial_x f(x, y)$ und $\partial_y f(x, y)$ und setzen $P = (0, 0)$ ein.

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= 2xa^2 - 2(x^2 + y^2 - bx)(2x - b) \\ \partial_y f(x, y) &= 2ya^2 - 2(x^2 + y^2 - bx)(2y) \\ \partial_x f(0, 0) &= 0 = \partial_y f(0, 0)\end{aligned}$$

Um nun zu verifizieren, dass die Multiplizität genau 2 ist, berechnet man die zweiten Ableitungen und stellt fest, dass diese nicht alle in P Null ergeben.

1.3 Die Pascalsche Schnecke als anallagmatische Kurve

Definition. Eine anallagmatische Kurve ist definiert als eine Kurve, die durch Inversion an einem bestimmten Kreis wieder auf sich selbst abgebildet werden kann. Dies geschieht in der Regel, indem die Punkte der äußeren Kurve auf die Punkte der inneren Kurve abgebildet werden und umgekehrt.

1.3.1 Die Herleitung des Inversionskreises

Wir wollen nun den Inversionskreis herleiten, indem wir uns folgenden Ausschnitt aus der Skizze der Pascalschen Schnecke betrachten. Dabei ist zu beachten, dass der Ursprung O wieder auf sich selbst abgebildet werden muss. Daraus lässt sich schließen, dass er einen Punkt auf dem Inversionskreis darstellt.

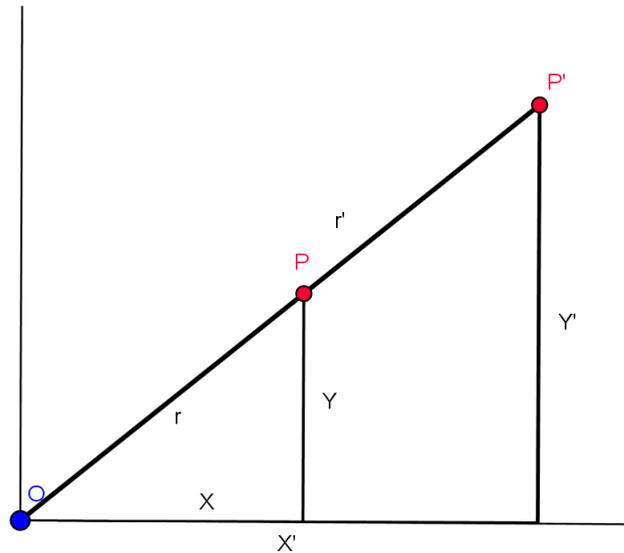


Abbildung 4: Zur Herleitung des Inversionskreises

Man erkennt mittels der Strahlensätze sofort, dass

$$\frac{X'}{X} = \frac{r'}{r} = \frac{rr'}{r^2}$$

Wenn wir nun den Radius des Inversionskreises mit K bezeichnen und diesen auf $K^2 = rr'$ festsetzen, so folgt:

$$\begin{aligned} X' &= \frac{K^2 X}{r^2} = \frac{K^2 X}{X^2 + Y^2} \\ Y' &= \frac{K^2 Y}{r^2} = \frac{K^2 Y}{X^2 + Y^2} \end{aligned} \tag{1}$$

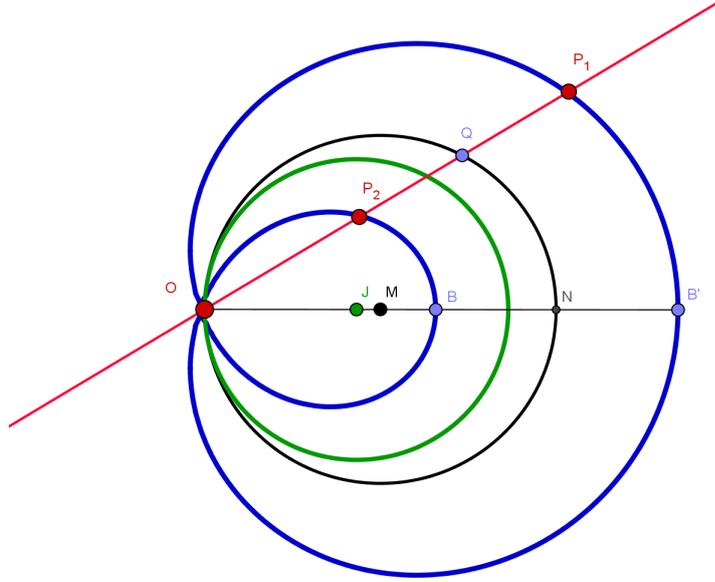


Abbildung 5: Pascalsche Schnecke mit Inversionskreis

Da wir schon wissen, dass eine anallagmatische Kurve auf sich selbst invertiert wird, muss der Mittelpunkt J des Inversionskreises so liegen, dass der Durchmesser ON des Kreises durch B und B' einer harmonischen Teilung zugrunde liegt. Daraus ergibt sich folgende Proportion:

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2K-(b-a)} &= \frac{b+a}{(b+a)-2K} \\ \Leftrightarrow (b^2-a^2) - (b-a)2K &= (b+a)2K - (b^2-a^2) \\ \Rightarrow K &= \frac{b^2-a^2}{2b} \end{aligned}$$

Nun ist noch zu beweisen, dass dieser Kreis wirklich der gesuchte Inversionskreis ist.

Beweis. Dazu setzen wir zuerst das kartesische Koordinatensystem von O nach J , also $Y = Y'$ und $X = X' + K$. Daraus ergibt sich die Kurvengleichung:

$$a^2(X'^2 + Y'^2 + K^2 + 2KX') - (X'^2 + Y'^2 + K^2 + 2KX' - bX' - bK)^2 = 0$$

Ersetzt man $c = 2K - b$ und führt A , B und C ein, um konstante Koeffizienten vereinfacht darzustellen, so ergibt sich:

$$[X'^2 + Y'^2 + K^2]^2 + 2cX' [X'^2 + Y'^2 + K^2] + AX'^2 + BX'Y' + CY'^2 = 0$$

Nun wenden wir Gleichung (1) auf die obige Gleichung an und erhalten dadurch:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{K^4 X^2}{(X^2 + Y^2)^2} + \frac{K^4 Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} + K^2 \right]^2 \\ &+ \frac{2cK^2 X}{(X^2 + Y^2)^2} \cdot \left[\frac{K^4 X^2}{(X^2 + Y^2)^2} + \frac{K^4 Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} + K^2 \right] \\ &+ A \frac{K^4 X^2}{(X^2 + Y^2)^2} + B \frac{K^4 XY}{(X^2 + Y^2)^2} + C \frac{K^4 Y^2}{(X^2 + Y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Wenn wir durch $(K^4 X^2)(X^2 + Y^2)^{-2}$ dividieren, erhalten wir unsere Ausgangsgleichung:

$$[X^2 + Y^2 + K^2] + 2cX [X^2 + Y^2 + K^2] + AX^2 + BXY + CY^2 = 0$$

Damit ist gezeigt, dass die Pascalsche Schnecke durch Inversion am Kreis J mit Radius $K = (b^2 - a^2)(2b)^{-1}$ auf sich selbst abgebildet wird. \square

Die Kartesische Ovale

Definition. Ein kartesisches Oval ist der Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 eine konstante Summe haben. Dabei werden F_1 und F_2 mit den Faktoren α bzw. β multipliziert.

Um die Kartesische Ovale zu konstruieren, benötigt man zwei gegebene Punkte F_1 und F_2 sowie c .

1.4 Erzeugung der Kurve

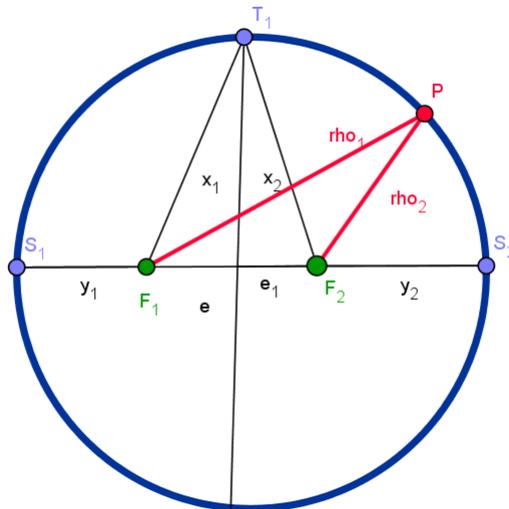


Abbildung 6: Konstruktion Kartesisches Oval

Die bipolare Koordinatengleichung lässt sich als

$$\alpha\rho_1 + \beta\rho_2 = c \tag{2}$$

darstellen. Daraus können wir ganz leicht die gewöhnlichen Polarkoordinaten herleiten.

1.5 Herleitung der kartesischen Kurvengleichung

Wählt man F_1 als Pol, so ergibt sich $r = \rho_1$. Mithilfe des Kosinussatzes folgt daraus:

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_1^2 + 4e\rho_1 \cos(\phi)}$$

Setzen wir dies in die bipolare Koordinatengleichung ein, erhalten wir:

$$\alpha\rho_1 + \beta\sqrt{\rho_1^2 + 4e\rho_1 \cos(\phi)} = c$$

Durch Umformen ergibt sich:

$$\rho_1^2 - \rho_1 \left(\frac{2\alpha c}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{4e\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2} \cos(\phi) \right) = \frac{4e^2\beta^2 - c^2}{\alpha^2 - \beta^2}$$

Wir wählen nun

$$\rho_1 = r, \quad a = \frac{2c\alpha}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad b = -\frac{4e\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}, \quad d^2 = \frac{c^2 - 4e^2\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2},$$

und erhalten dadurch die quadratische Gleichung

$$r^2 - r(a + b \cos(\phi)) + d^2 = 0 \quad (3)$$

Durch die Vielfachheit der Nullstellen gehören zu jedem Winkel zwei Kurvenpunkte, wodurch sich jeweils immer zwei Ovale ergeben. Der Grund dafür ist das Gleichbleiben der Polargleichung für $-\beta$ und β . Das äußere Oval wird somit durch die Gleichung $\alpha\rho_1 - \beta\rho_2 = c$ beschrieben.

Mit $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\cos(\phi) = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ erhält man weiter:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} \left(a + \frac{bx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + d^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} a - bx + d &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} a &= x^2 + y^2 - bx + d \\ \Leftrightarrow (x^2 + y^2) a^2 &= (x^2 + y^2 - bx + d)^2 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Kartesische Ovale eine Quartik ist. Dadurch kann man sie beispielsweise in die oben behandelte Pascalsche Schnecke überführen. Diese ist tatsächlich ein Spezialfall der Ovalen, für den man lediglich $d^2 = 0$ setzen muss.

1.6 Die Kartesische Ovale als anallagmatische Kurve

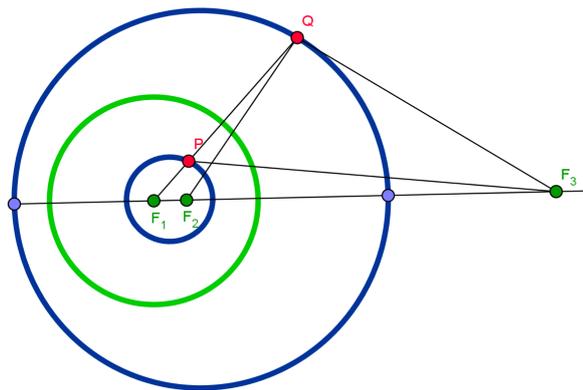


Abbildung 7: Inversion des kartesischen Ovals

Wie die Pascalsche Schnecke ist auch die Kartesische Ovale eine anallagmatische Kurve. Um dies zu zeigen, konstruieren wir den dritten Brennpunkt F_3 . Aus (3) geht hervor, dass das Produkt

der Einheitswurzeln $r' \cdot r'' = d^2$ konstant ist. Daraus lässt sich schließen, dass für zwei auf demselben Fahrstrahl liegenden Punkte P und Q die Gleichung

$$F_1P \cdot F_2Q = d^2$$

gilt. Also ist der Inversionskreis, den wir suchen, ein um F_1 geschlagener Kreis mit Radius d . Konstruiert man an diesem Kreis nun den zu F_2 inversen Punkt F_3 und verbindet F_2 und F_3 mit P und Q , so gilt wegen

$$F_1P \cdot F_2Q = F_1F_2 \cdot F_1F_3$$

$$\Delta F_1PF_2 \sim \Delta F_1F_3Q$$

Ersetzt man nun in (2) c durch $\gamma \cdot F_1F_2$ und wegen der durch die Ähnlichkeitsbedingungen bestehende Proportionalität von F_1F_3 , F_3Q und F_1Q zu F_1P , F_2P und F_1F_2 , gilt:

$$\alpha \cdot F_1F_3 + \beta \cdot F_3Q = \gamma \cdot F_1Q$$

Durch Umformulieren erhält man auch den konstanten Term:

$$\gamma \cdot F_1Q - \beta \cdot F_3Q = \alpha \cdot F_1F_3 = g$$

Setzen wir wieder $F_1Q = \rho_1$ und $F_3Q = \rho_3$, so gilt für Q auf dem äußeren Oval:

$$\gamma\rho_1 - \beta\rho_3 = g$$

Weiter folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke F_1PF_3 und F_1F_2Q aus (2) und wegen der oben genannten Proportionalität:

$$\alpha \cdot F_1F_3 - \beta \cdot F_3P = \gamma \cdot F_1P \gamma \cdot F_1P + \beta \cdot F_3P = \alpha \cdot F_1F_3$$

Daran erkennt man, dass für den Punkt F_3 dieselben Eigenschaften bezüglich der Gleichungen gelten wie für F_1 und F_2 , weshalb er tatsächlich der dritte Brennpunkt der Kartesischen Ovalen darstellt.

Literatur

- [1] Hermann Schmidt, "Ausgewählte höhere Kurven", Kesselringsche Verlagsbuchhandlung Wiesbaden, 1940.